PROBLÈMES DU 4ÈME TOURNOI FRANÇAIS DES JEUNES MATHÉMATICIENNES ET MATHÉMATICIENS

29 MAI – 1 JUIN 2014, PALAISEAU (FRANCE)

Préambule

Ces problèmes sont difficiles et sont proposés par des chercheurs et étudiants en mathématiques. Ils ont été sélectionnés sur deux critères : ils n'admettent pas, à la connaissance du jury, de solution complète ; et sont accessibles à des lycéens, c'est-à-dire que les auteurs sont certains qu'un travail de recherche élémentaire peut être mené sur ces problèmes. Le jury n'attend pas des candidats qu'ils résolvent entièrement un problème, mais qu'ils en comprennent les enjeux, résolvent des cas particuliers, repèrent les difficultés et proposent des pistes de recherche. Enfin, il n'est pas nécessaire de traiter tous les problèmes : chaque équipe peut en refuser un certain nombre sans pénalité. Voir le règlement pour plus de détails.

Table des matières

Mots-clés : 1. combinatoire — 2. séries, jeux — 3. optimisation — 4. probabilités — 5. géométrie — 6. analyse — 7. algèbre — 8. arithmétique, jeux — 9. combinatoire.

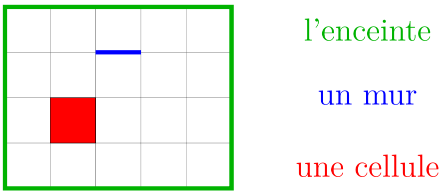
Notations

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	ensemble des entiers positifs
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$	ensembles des nombres entiers, rationnels et complexes
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$	droite réelle, plan
$a \bmod b$	reste après division de a par b
$\operatorname{Card} E$	cardinal de l'ensemble E
E^n	ensemble des n-uplets sur l'ensemble E
PGCD $(x_1, \ldots, x_n)$	plus grand diviseur commun des entiers $x_1, \ldots, x_n$
$[a, b]$, $]a, b[$	intervalle fermé et ouvert de $\mathbb{R}$
$\mathbb{F}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$	corps des résidus modulo un nombre premier p

Date: 1er mars 2014.

1. Labyrinthes

On considère une grille rectangulaire de taille $n \times m$. Le bord du rectangle est nommé *enceinte*. Les petits carrés sont appelés des *cellules*. On note $\mathcal{C}(n,m)$ l'ensemble des cellules. Des *murs* peuvent être placés sur les côtés des cellules. On appelle *labyrinthe* un ensemble de murs tel que l'espace à l'intérieur de l'enceinte soit connexe et tel que l'ajout d'un mur fait nécessairement perdre la connexité (voir figure 1). On note $\mathcal{L}(n,m)$ l'ensemble des labyrinthes de taille $n \times m$, et $L(n,m)$ son cardinal.



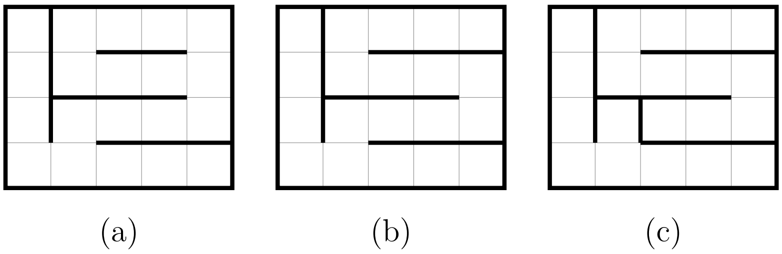


FIGURE 1. Seul (b) est un labyrinthe :
(c) n'est pas un labyrinthe car il contient deux espaces séparés (et n'est donc pas connexe) et (a) n'en est pas un car on peut ajouter un mur sans perdre la connexité.

Étant données deux cellules A et B, on appelle *chemin* entre A et B une succession de pas verticaux et horizontaux, contigus, reliant A à B, sans passer deux fois par une même cellule. On note $|AB|$ la longueur du plus court chemin entre A et B. Étant donné un labyrinthe λ, on appelle λ-chemin entre A et B tout chemin entre A et B ne transperçant pas les murs de λ. On note $\|AB\|_\lambda$ la longueur du plus court λ-chemin entre A et B.

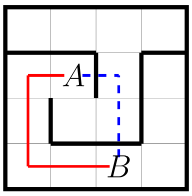


FIGURE 2. Ici, $|AB| = 3$ mais $\|AB\|_\lambda = 5$.

1. Pour un labyrinthe λ, on note $G(\lambda)$ la longueur du plus long λ-chemin qu'il contient. Étudier $\min\limits_{\lambda \in \mathcal{L}(n,m)} G(\lambda)$ et $\max\limits_{\lambda \in \mathcal{L}(n,m)} G(\lambda)$.

2. Combien de murs peut avoir un labyrinthe de taille $n \times m$?

3. Soient $A, B \in \mathcal{C}(n,m)$ deux cellules données. Étudier $\max\limits_{\lambda \in \mathcal{L}(n,m)} \|AB\|_\lambda$ et $\min\limits_{\lambda \in \mathcal{L}(n,m)} \|AB\|_\lambda$.

4. Étudier $L(n,m)$ *(on pourra commencer par les cas $m = 2, 3, \ldots$).*

5. On note respectivement A et Z les cellules des coins supérieur-gauche et inférieur-droit. Pour n entier, on note $M(n,m)$ la moyenne de $\|AZ\|_\lambda$ (sur tous les labyrinthes $\lambda \in \mathcal{L}(n,m)$). Étudier $M(n,m)$.

6. On définit la *complexité* d'un labyrinthe $\lambda \in \mathcal{L}(n, m)$ par :

$$C(\lambda) = \frac{1}{nm(nm-1)} \sum_{\substack{(A,B) \in \mathcal{C}(n,m)^2 \\ A \neq B}} \frac{||AB||_\lambda}{|AB|}.$$

Etudier $\max\limits_{\lambda \in \mathcal{L}(n,m)} C(\lambda)$ et $\min\limits_{\lambda \in \mathcal{L}(n,m)} C(\lambda)$. Quels sont les labyrinthes pour lesquels ces extrema sont atteints ?

7. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

2. Un jeu égyptien

Un ensemble E infini d'entiers naturels non nuls, et un entier naturel non nul n sont donnés. Alice et Bob jouent au jeu suivant. Alice choisit n éléments $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ de E, puis Bob choisit n éléments $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ de E (un élément peut être choisi à la fois par Alice et par Bob). Bob gagne si

$$1 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \qquad \text{ou si} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \leqslant 1,$$

et Alice gagne sinon. On note $G(E)$ l'ensemble des entiers $n \geqslant 1$ tels qu'Alice dispose d'une stratégie gagnante.

1. Déterminer $G(E)$ dans les cas suivants :

a) $E = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

b) $E = \mathbb{N}^*$.

c) $E = 3\mathbb{N}^*$.

d) $E = \{p \mid p \text{ est un nombre premier}\}$.

2. Déterminer l'ensemble $\{G(E) \mid E \subset \mathbb{N}^* \text{ est infini}\}$.

3. Existe-t-il une suite infinie d'ensembles infinis $E_0, E_1, \ldots$ tels que pour tout $i \geqslant 0$, $E_{i+1} = G(E_i)$?

4. Alice et Bob décident de changer la condition de victoire : Bob gagne maintenant si

$$1 > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \qquad \text{ou si} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geqslant 1,$$

et Alice gagne sinon. Montrer que pour tout n, Alice dispose d'une stratégie gagnante à ce second jeu.

5. On dit qu'Alice dispose d'une stratégie gagnante *gloutonne* à ce second jeu si cette stratégie consiste à choisir les n premiers termes d'une suite infinie $a_1 < a_2 < \ldots$ (indépendante de n). Déterminer si Alice dispose ou non d'une stratégie gloutonne dans les cas suivants :

a) $E = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

b) $E = \mathbb{N}^*$.

c) $E = 3\mathbb{N}^*$.

d) $E = \{p \mid p \text{ est un nombre premier}\}$.

6. Suggérer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

3. Heure de pointe

On considère une ville dont les rues forment un quadrillage carré. Il est 17h, tout le monde sort du travail et veut rentrer chez lui. La ville est constituée de n rues parallèles régulièrement espacées dans le sens Nord-Sud (NS), et n rues avec le même espacement dans le sens Ouest-Est (OE). À chaque intersection se trouve un feu bicolore (donc toujours vert dans un sens et rouge dans l'autre). On appellera feu (i, j) le feu à l'intersection des rues i et j. Les habitants roulent à une vitesse constante égale à un espacement par unité de temps et, si par hasard ils arrivent à l'intersection précisément à l'instant où le feu devient rouge, alors ils s'arrêtent et attendent qu'il redevienne vert comme de bons citoyens.

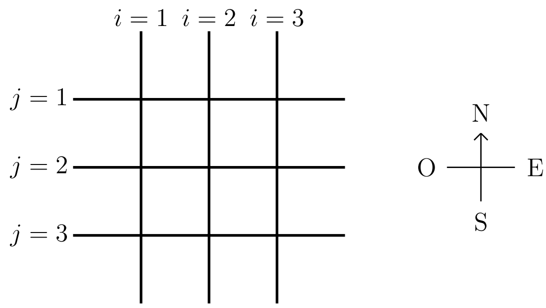


FIGURE 3. La ville pour $n = 3$.

On dira que le feu (i, j) est dans l'état NS (resp. OE) lorsqu'il est vert dans ce sens, *i.e.* lorsque les voitures de la rue i (resp. j) ont le droit de passer. Les feux sont paramétrés de la manière suivante : on fixe un réel $\tau > 0$ et pour tous $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ on fixe $r_{i,j} \in]-\tau, \tau]$ tels que le feu (i, j) passe de l'état OE à l'état NS au temps $t = r_{i,j}$, puis à l'état OE en $t = r_{i,j} + \tau$, puis de nouveau à NS en $t = r_{i,j} + 2\tau$ et ainsi de suite, changeant de couleur tous les τ.

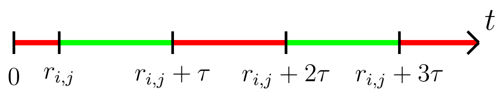


FIGURE 4. La couleur du feu (i, j) dans le sens NS au cours du temps

1. Dans cette ville, il y a un seul habitant par rue. Celui-ci travaille d'un côté (au Nord ou à l'Ouest) et habite de l'autre (au Sud ou à l'Est). À $t = 0$, les $2n$ habitants quittent donc leur lieu de travail pour se rendre chez eux. Ainsi, dans le cas $n = 3$ ci-dessous, les personnes qui travaillent en un point A_i veulent se rendre au point Z_i, celles qui travaillent en B_j habitent en Y_j. Pour un entier n fixé et τ donné, comment choisir les $(r_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ tels que la moyenne du temps que chaque habitant met pour arriver chez lui soit la plus petite possible ?

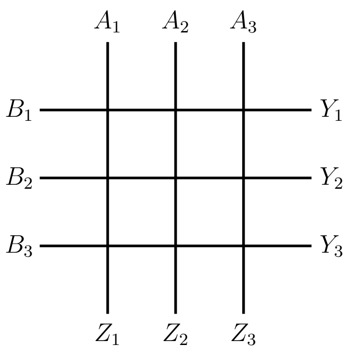


FIGURE 5. La ville pour $n = 3$.

2. On considère maintenant la même ville carrée, mais dans laquelle on trouve des bureaux et des maisons de tous les côtés. Dans chaque rue vivent deux habitants, avec chacun son bureau d'un côté et sa maison de l'autre. Par exemple, une personne travaille en A_1 et habite en Z_1, l'autre travaille en Z_1 et habite en A_1. À $t = 0$, les $4n$ habitants de la ville veulent rentrer chez eux.

Que se passe-t-il lorsque $\tau > 2n$? Lorsque l'on prend τ très petit ?

Désormais on fixe $\varepsilon \in]0; 0.1]$ et on se restreindra à l'étude de $\tau \in [\varepsilon; 2n]$.

3. On étudie ici le cas $n = 2$. Comment choisir les $(r_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$ pour optimiser les temps de transport (dans le sens de la question précédente) dans les cas suivants :

a) $\tau = \frac{1}{k}$ où $k \in \mathbb{N}^*$?

b) $\tau \in \mathbb{Q}$?

c) $\tau \notin \mathbb{Q}$?

d) Y a-t-il alors des choix de τ optimaux ? Si oui, lesquels ?

4. Mêmes questions pour une grille de taille n quelconque.

5. Mêmes questions dans le cas d'une grille rectangulaire de m sur n. Remarquez qu'ici il y a plus d'une façon d'optimiser les retards ! On peut en effet chercher :

a) les $r_{i,j}$ qui optimisent le temps de parcours moyen.

b) les $r_{i,j}$ qui maximisent la vitesse moyenne (pour chacun, on calcule la distance minimale entre le bureau et la maison, divisée par le temps de parcours, et on fait une moyenne).

6. On se place maintenant dans le cadre d'une ville où, pour tout couple (A, B) d'extrémités de rues avec $A \neq B$, il existe une (et une unique) personne qui habite en A et travaille en B. Désormais les conducteurs peuvent tourner et choisir le chemin optimal du point A au point B. Trouvez, pour τ fixé, les $r_{i,j}$ optimaux dans les deux cas évoqués dans la question précédente.

7. Proposez d'autres généralisations.

* * *

4. Tirage au sort

Soit $N \geqslant 1$ un entier. Un tournoi de mathématiques propose un nombre fini de problèmes numérotés de 1 à N. Un participant doit tirer au sort un problème selon la procédure suivante. Il tire au hasard un problème $k \in \{1, \ldots, N\}$. Il peut choisir de l'accepter ou de le refuser. S'il le refuse, le problème est retiré du chapeau et il tire au hasard parmi les problèmes restants, et ainsi de suite. S'il refuse $N - 1$ problèmes, il est obligé d'accepter le dernier. Le participant est *seul* à participer à ce tirage. Soit $r \in \{0, \ldots, N - 1\}$ un entier.

1. Soient $s_1, s_2 \ldots, s_N$ des nombres réels connus du participant. Si ce dernier accepte le problème $k \in \{1, \ldots, N\}$, il reçoit une *satisfaction* égale à s_k. En refusant au plus r problèmes, comment le participant doit-il procéder pour optimiser l'espérance de sa satisfaction ? On notera $S_N^r(s_1, \ldots, s_N)$ la plus grande satisfaction que le participant peut se garantir (en espérance). Étudier $S_N^r(s_1, \ldots, s_N)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$ un réel. En refusant au plus r problèmes, quelle satisfaction le participant peut-il se garantir avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - \varepsilon$?

3. Soit $(c_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de réels positifs. Si le participant accepte le problème $k \in \{1, \ldots, N\}$ après en avoir refusé n ($n \geqslant 0$), il obtient à présent une satisfaction égale à $s_k - c_n$. Par ailleurs, le nombre de refus n'est plus limité (tant qu'il reste des problèmes dans le chapeau). Reprendre dans ce cadre les questions 1 et 2.

4. Soit $1 \leqslant t \leqslant N$ un entier. On suppose à présent que le tournoi comporte t tours. Avant chaque tour, le participant procède à un tirage au sort identique à celui décrit dans l'introduction, à ceci près qu'un probème qui a été accepté est définitivement enlevé du chapeau, et ne peut donc être tiré lors des tours suivants. En revanche, un problème qui a été refusé est replacé dans le chapeau lors des tours suivants. On appelle satisfaction totale la somme des satisfactions obtenues lors des t tours. Reprendre les questions 1, 2 et 3 en remplaçant *satisfaction* par *satisfaction totale*.

5. Proposer d'autres généralisations et les étudier.

* * *

5. CROISSANCE DE NÉNUPHARS

On modélise les nénuphars par des disques de centre fixe et dont le rayon croît proportionnellement au temps. On considère n points du plan ($n \geqslant 1$). À la date $t \in \mathbb{R}_+$, en chacun de ces points est centré un disque de rayon t. Ces disques peuvent se superposer. A certaines dates, les disques peuvent laisser des *trous* (voir figure). Le nombre de trous évoluant au cours du temps, on peut le représenter par une suite finie (u_n) dont :

i. le premier et le dernier termes sont nuls ;

ii. deux termes consécutifs sont toujours différents.

Une suite vérifiant ces deux conditions sera dite *admissible*. Pour l'exemple de la figure, la suite associée est $(0, 1, 2, 1, 0)$.

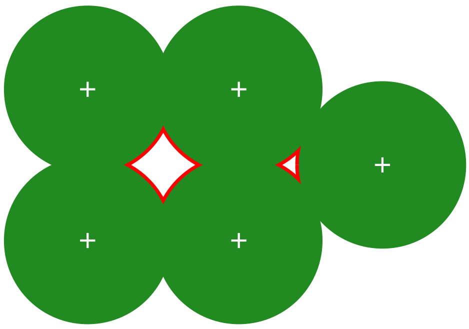


FIGURE 6. 5 nénuphars formant 2 trous

1. Soit $n \geqslant 1$. Trouver toutes les suites associées aux configurations à n points (*on pourra commencer par étudier les petites valeurs de* n).

2. Soit (u_n) une suite admissible donnée. Quels sont les nombres de points possibles pour les configurations auxquelles (u_n) est associée ?

3. Étant donnée une configuration de points, on note t_{min} la date minimale à partir de laquelle il n'y a plus de trou. Étudier t_{min} en fonction de la configuration de points. *Commencer par étudier des petites valeurs de* n *ou des configurations particulières. Chercher des bornes pour* t_{min} *dans le cas général.*

4. On étudie à présent l'évolution d'une population de nénuphars sur plusieurs générations. Désormais, lorsque deux nénuphars se rencontrent, tous les nénuphars reprennent immédiatement leur croissance comme à $t = 0$ et un nouveau nénuphar apparaît au point de contact.

Si plusieurs contacts ont lieu simultanément un nouveau nénuphar se forme à chaque point de contact. Etant donnée une configuration initiale, décrire l'évolution de la population de nénuphars.

5. On étudie un troisième modèle, identique au précédent, sauf que lorsque deux nénuphars se rencontrent, **eux seuls** reprennent leur croissance comme à $t = 0$. Un nouveau nénuphar apparaît au point de contact. Étant donnée une configuration initiale, décrire l'évolution de la population de nénuphars.

6. Proposer des généralisations.

* * *

6. Supports de fonctions

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et pour tout ensemble $E \subset \mathbb{R}$ on note $f^{-1}(E)$ l'ensemble des réels x vérifiant $f(x) \in E$. On dira qu'un ensemble A d'entiers naturels (non nécessairement fini) est un *un support* de $\mathbb{R}$ s'il existe une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(\{x\})$ est fini ;
- $A = \{\mathrm{Card}\, f^{-1}(\{x\}),\ x \in \mathbb{R}\}$.

1. Pour quelles valeurs de n, $\{n\}$ est-il un support de $\mathbb{R}$?

2. Existe-t-il un support de $\mathbb{R}$ ne contenant que des entiers pairs ?

On se restreint ici au cas des fonctions polynomiales : $A \subset \mathbb{N}$ est *un support polynomial* de $\mathbb{R}$ s'il existe une fonction polynomiale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(\{x\})$ est fini ;
- $A = \{\mathrm{Card}\, f^{-1}(\{x\}),\ x \in \mathbb{R}\}$.

3. Trouver tous les supports polynomiaux de $\mathbb{R}$.

On se place de nouveau dans le cas général.

4. Trouver tous les supports de $\mathbb{R}$.

5. Étudier les mêmes questions en remplaçant $\mathbb{R}$ par $[0,1]$: $A \subset \mathbb{N}$ est *un support de* $[0,1]$ s'il existe une fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]$ telle que :

- pour tout $x \in [0,1]$, l'ensemble $f^{-1}(\{x\})$ est fini ;
- $A = \{\mathrm{Card}\, f^{-1}(\{x\}),\ x \in [0,1]\}$.

6. Étudier d'autres ensembles.

* * *

7. Sommes d'inverses et inverses de sommes

Soit p un nombre premier impair. On considère l'ensemble $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ des entiers modulo p. On note $\mathbb{F}_p^*$ l'ensemble des éléments inversibles de cet ensemble, *i.e.* les $x \in \mathbb{F}_p$ tels qu'il existe $y \in \mathbb{F}_p$ vérifiant $xy \equiv 1 \mod p$. Pour $x \in \mathbb{F}_p^*$, on note x^{-1} un tel élément y (remarquer qu'il est unique dans $\mathbb{F}_p$).

Dans ce problème, on veut étudier l'équation

$$x + x^{-1} + y + y^{-1} = t,$$

où $x, y \in \mathbb{F}_p^*$ et $t \in \mathbb{F}_p$. On note $N_p(t)$ le nombre de solutions en x et y pour un t fixé.

1. Quel est le cardinal de l'ensemble $A := \{x + x^{-1} \,|\, x \in \mathbb{F}_p^*\}$? Et celui des ensembles

$$A + A := \{a + b \,|\, a, b \in A\} \quad \text{et} \quad A \cdot A := \{a \cdot b \,|\, a, b \in A\} \ ?$$

On pourra commencer par les calculer explicitement pour de petites valeurs de p.

2. Calculer $N_p(0)$.

3. Pour de petites valeurs de p, calculer explicitement $N_p(t)$ pour tout t.

4. Existe-t-il des couples (a, b) avec $a \in \mathbb{F}_p^*$ et $b \in \mathbb{F}_p$ tels que $N_p(t) = N_p(at + b)$ pour tout $t \in \mathbb{F}_p$? Existe-t-il $a \in \mathbb{F}_p^*$ tel que $N_p(t) = N_p(at^{-1})$ pour tout $t \in \mathbb{F}_p^*$? Étudier d'autres transformations possibles de t laissant stable la valeur de N_p.

5. Généraliser ces résultats à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour n quelconque (on pourra commencer avec les puissances de nombres premiers), puis aux corps finis quelconques.

* * *

8. UN JEU DE JETONS

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère un jeu à deux joueurs qui se joue avec n jetons identiques. Une *configuration* est la répartition de ces n jetons en un certain nombre de piles. Par exemple, pour $n = 4$, les configurations possibles sont les suivantes :

$$[4], \qquad [3,1], \qquad [2,2], \qquad [2,1,1], \qquad [1,1,1,1].$$

En partant d'une configuration de départ, les joueurs jouent à tour de rôle et peuvent :
- soit diviser une pile en m piles de même taille ($m \geqslant 2$ entier) ;
- soit fusionner deux piles de tailles différentes.

Le joueur n'ayant plus de coup possible a perdu.

1. Si on imagine que les joueurs ne cherchent pas nécessairement à gagner, pour quels $n \geqslant 2$ existe-il des parties qui durent indéfiniment ?

Posons les définitions suivantes :
- Une configuration c est dite *de longueur l* si, partant de celle-ci, un des deux joueurs est sûr de pouvoir gagner en l coups (on compte les coups des deux joueurs) et si pour tout $k < l$, son adversaire peut l'empêcher de gagner en k coups. On note alors $\ell(c) = l$. Exemples dans le cas $n = 4$:
  - En partant de la configuration $[3,1]$, le joueur qui commence (on l'appellera J_1) est sûr de pouvoir gagner en 1 coup. En effet, s'il joue $[3,1] \longrightarrow [1,1,1,1]$, l'autre joueur (qu'on appellera J_2) n'a plus de coup possible, et J_1 a donc gagné. Conclusion, $\ell([3,1]) = 1$.
  - En partant de $[2,2]$, J_2 est sûr de pouvoir gagner en 2 coups. En effet, J_1 n'a qu'un seul coup possible : $[2,2] \longrightarrow [2,1,1]$. J_2 peut ensuite jouer $[2,1,1] \longrightarrow [1,1,1,1]$ et J_1 a alors perdu. Conclusion, $\ell([2,2]) = 2$.
- Une configuration c est dite de *longueur finie* s'il existe un $l \in \mathbb{N}$ telle qu'elle soit de longueur l. Sinon, on pose $\ell(c) = \infty$.
- La *longueur du jeu* est définie comme étant la plus grande longueur parmi ses configurations de longueur finie.

2. Trouver toutes les configurations de longueur 1.

3. Caractériser les $n \geqslant 2$ pour lesquels le jeu à n jetons est de longueur supérieure ou égale à :

a) 2

b) 4

4. Soit $n \geqslant 2$. Étudier la longueur du jeu à n jetons *(on pourra commencer par étudier les petites valeurs de n).*

5. Pour quels $n \geqslant 2$ les configurations du jeu à n jetons sont-elles toutes de longueur finie ?

* * *

9. Variations sur les mots

Soient $p, n, k \geqslant 1$ des entiers tels que $k \leqslant n$. Soit Σ un ensemble de cardinal p. L'ensemble Σ^n des n-uplets de Σ est appelé ensemble des *mots à n lettres sur l'alphabet* Σ. Pour deux mots $M = (a_1, \ldots, a_n)$ et $N = (b_1, \ldots, b_n)$ dans Σ^n, on dira qu'ils diffèrent de k lettres si

$$\mathrm{Card}\,\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid a_i \neq b_i\} = k.$$

On notera alors $d(M, N) = k$.

1. On considère les ensembles de mots $E \subset \Sigma^n$ dont les éléments diffèrent deux à deux d'exactement k lettres. Autrement dit

$$\forall M, N \in E, \quad M \neq N \Longrightarrow d(M, N) = k.$$

Déterminer le plus grand cardinal possible d'un tel ensemble E dans les cas suivants :

a) $k = n = p$,

b) $k = 1$,

c) $k = p - 1$,

d) le cas général.

2. Reprendre la même question en remplaçant "exactement k lettres" par "au plus k lettres".

3. Reprendre la même question en remplaçant "exactement k lettres" par "au moins k lettres".

4. Proposer d'autres directions de recherche et les étudier.

* * *

Adresse mail : `organisateurs@tfjm.org`
URL : `www.tfjm.org`